6.27 Rezept: Rang bestimmen

Sei Matrix A gegeben.
Überführe A durch Zeilentrafo in eine Matrix A' in Zeilenstufenform.
Dann ist

$$rk(A) = rk(A')$$
$$= \text{Anzahl der Pivots von } A'$$

Beweis:

Überführe A' durch weitere Trafos in Matrix A'' in Normalform (siehe SCHRITTE 2 & 3 im Eliminationsverfahren). Nach Korollar 6.22 ist

$$rk(A) = rk(A') = rk(A'').$$

Ferner haben A' und A'' dieselbe Anzahl an Pivots.

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$e_1, e_2, \dots, e_r$$

$\operatorname{im}(f_{A''}) = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$, also ist

$$rk(A'') = \dim(\operatorname{im}(f_{A''})) = r$$
$$= \text{Anzahl der Pivots}$$

$\square$

Beispiel:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

hat Zeilenstufenform

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ (siehe oben)

also ist $rk(A) = 2$.

(Normalform: $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)